

NUMERACIÓN DE GRAFOS: UNA MIRADA A LA MATEMÁTICA DISCRETA

Yeison Alexander Sánchez Rubio

Licenciado En Matemáticas Universidad Pedagógica Nacional

Bogotá D.C, Colombia

yei506@yahoo.es

Resumen

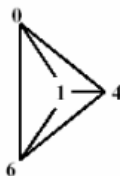
Los grafos garbosos son aquellos que admiten una numeración especial propuesta por Golomb, relacionada con particiones de números enteros no negativos; se convierte en un juego y un reto bastante interesante determinar qué grafos son garbosos y obtener su numeración o sus numeraciones en caso de que permita más de una, y en este ejercicio reencuentran y trabajan regularidades entre números enteros no negativos que no son usualmente estudiadas.

Los grafos garbosos de Golomb

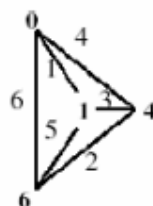
Solomon W. Golomb, es quien propone toda una familia de problemas acerca de la numeración de grafos que llamo **grafos garbosos**. Golomb define un “grafo garboso” como cualquier grafo ya sea planar (es decir que podemos dibujarlo en un plano sin que sus lados se corten) o no, que acepta una **numeración garbosa**, existen 4 condiciones para poder decir que un grafo esta numerado garbosamente:

1. El grafo debe carecer de bucles, es decir que no deben haber líneas que conecten un vértice con el mismo.
2. El grafo no debe tener lados múltiples, es decir que entre dos vértices distintos a lo más hay una línea o lado que los une.
3. A cada uno de los vértices se les debe asignar un número entero no negativo, que no sea mayor al número total de los lados del grafo, y además no se le podrá asignar el mismo número a dos vértices distintos.
4. A cada uno de los lados también se le asignara un entero no negativo, correspondiente al valor absoluto de la diferencia que existe entre los números asignados a los vértices que tiene como extremos.

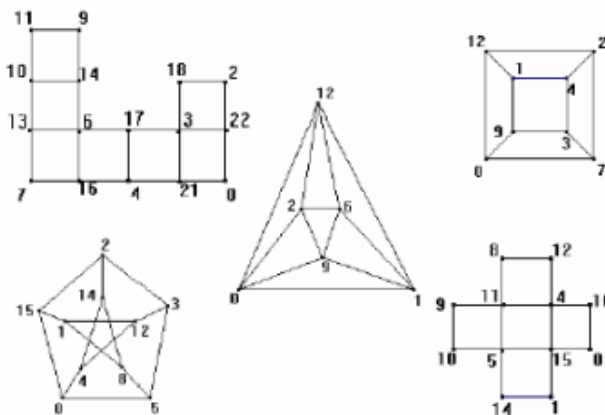
Miremos un ejemplo de un grafo numerado garbosamente:



Observemos que como el máximo número que se le puede asignar a un vértice corresponde al número de lados, entonces el máximo número que se le podrá asignar a un lado, también corresponderá al número de total de lados del grafo, y además como a dos vértices no se les puede asignar el mismo número entonces el menor número que se le puede asignar a un lado es el 1, por estas razones, y tendiendo en cuenta que todos los lados del grafo van numerados podemos decir que la numeración de los lados debe ir desde 1 hasta el número total de lados, veamos:

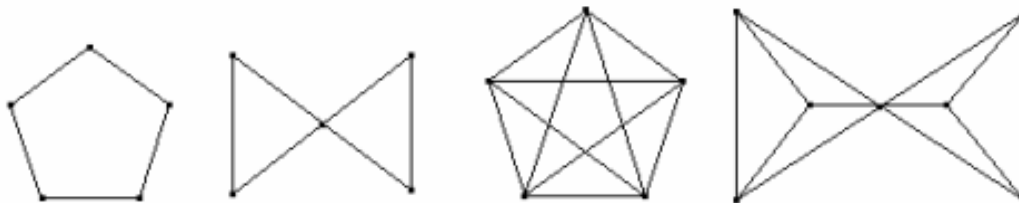


He aquí otros ejemplos de grafos numerados garbosamente:



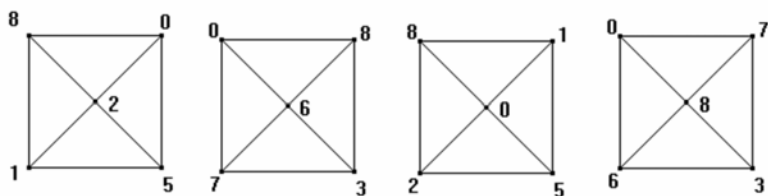
En todo grafo numerado garbosamente, es necesario que a uno de los vértices se le asigne el número 0, y a otro se le asigne, el numero total de lados del grafo, y además estos dos vértices, siempre deben estar conectados, ya que es la única forma en que la diferencia de los extremos de un lado sea igual al número de lados del grafo.

No todos los grafos se pueden numerar garbosamente, los grafos que no pueden ser numerados garbosamente reciben el nombre de grafos desgarbados, he aquí algunos ejemplos:



Resulta entonces interesante mirar cuales grafos pueden ser numerados garbosamente y cuales no, y crear estrategias para numerar cierto tipos de grafos garbosamente. Antes de mirar algunos

tipos de grafos que siempre pueden ser numerados garbosamente, observemos que un grafo puede tener más de una numeración garbosa:



Aquí tenemos 4 numeraciones garbosas de un mismo grafo, lo que demuestra que la numeración de un grafo garboso no es única, sin embargo, no todas son estructuralmente distintas; si tenemos un grafo de n lados, y una numeración garbosa del mismo, basta cambiar el número asignado a cada vértice por el resultado de restar n menos el número asignado al vértice, y obtendremos una nueva numeración garbosa del grafo, que en esencia tiene la misma estructura de la anterior, en tales casos diremos que las numeraciones garbosas son duales. Observemos que las dos primeras numeraciones de nuestro ejemplo son duales al igual que las dos últimas.

Algunos tipos de grafos garbosos

A continuación mostraremos algunas clases de grafos garbosos y las estrategias que se pueden utilizar para obtener su numeración garbosa¹:

Gusanos: Llamaremos gusanos a los grafos en los que de dos de sus vértices solamente se desprende un lado, y de los demás de sus vértices se desprenden dos lados, o también podríamos decir que son los grafos que forman una línea, veamos:

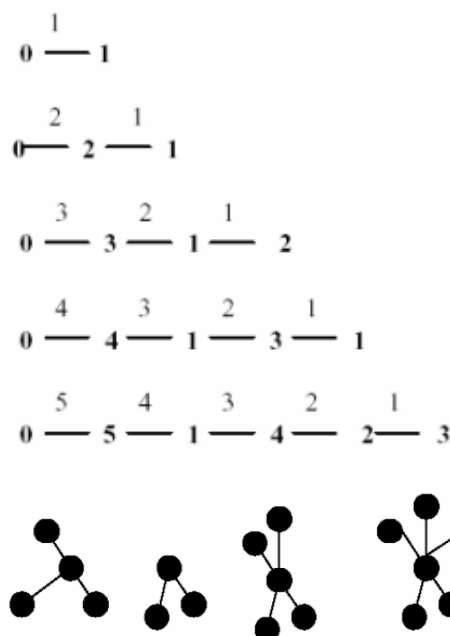


Observemos que este tipo de grafo, tiene un vértice más que el número de lados del grafo y como el menor número que puedo asignar es 0 y el mayor es el que corresponde al número de lados, debemos utilizar todos los números desde cero hasta el total de lados para numerar los vértices. Veamos la numeración garbosa de algunos gusanos:

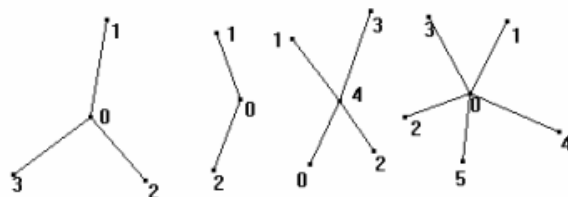
Una estrategia para numerar garbosamente los gusanos es asignar al primer vértice de izquierda a derecha el menor número posible (el cero), al siguiente vértice el mayor (el numero de lados del grafo), al siguiente el menor de los restantes (1), al siguiente el mayor de los restantes (el numero de lados del grafo menos 1), al siguiente el menor de los restantes luego el mayor y así sucesivamente, de esta manera siempre podremos numerar garbosamente un grafo de este tipo.

Estrellas: Los grafos que denominamos estrellas, son aquellos en los que todos sus lados parten desde un mismo vértice, veamos algunos ejemplos:

¹Aunque este tipo de grafos son tomados de [1], las estrategias para obtener su numeración garbosa y sus nombres, algunas fueron desarrolladas en el Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y otras desarrolladas a partir del trabajo hecho allí.

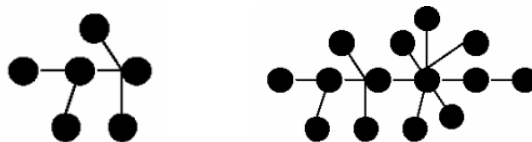


Al igual que con las gusanos estos grafos, tiene un vértice más que el número de lados, y como el menor número que puedo asignar es 0 y el mayor es el que corresponde al número de lados, debemos utilizar todos los números desde cero hasta el total de lados para numerar los vértices. Veamos las numeraciones garbosas que obtenemos con este tipo de grafos:

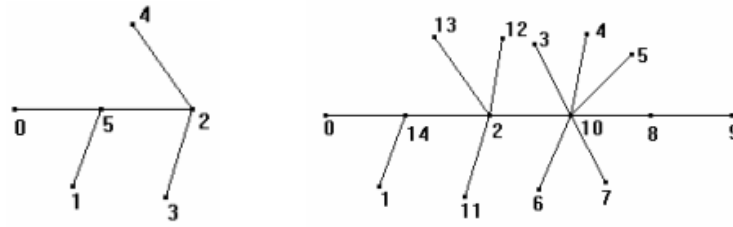


Las estrellas son otro tipo de grafo que siempre podemos numerar garbosamente, basta con asignarle el cero al vértice central, y los números restantes a los demás vértices.

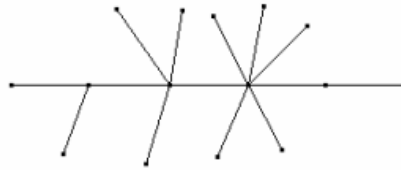
Orugas: Llamaremos orugas a aquellos grafos en los cuales se puede identificar un gusano, que nos servirá de base, y de cada uno de los vértices puntos del gusano pueden desprenderse otros lados (ramas), pero del extremo de cada uno de esas ramas no se desprende ningún otro lado. Miremos unos ejemplos:



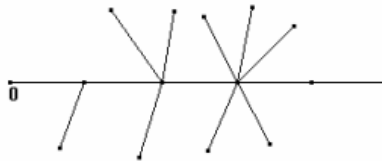
Las orugas también tienen un punto más que el número de lados, miremos como se pueden numerar garbosamente algunos de ellos:



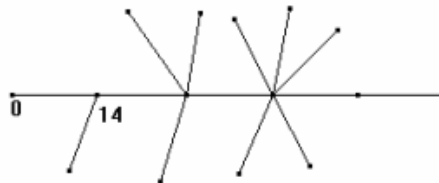
Se toma al igual que el gusano el número menor para asignárselo al primer vértice del gusano base, después a cada rama que se desprenda de este vértice se le empiezan a asignar los números mayores buscando que el menor de estos números mayores sea asignado a la rama que hace parte del gusano base, luego tomamos ese vértice sobre el gusano al que le asignamos el menor mayor y a cada una de los vértices de sus otras ramas le asignamos los números menores de forma tal que el mayor de ellos quede en el vértice que hace parte del gusano base, y así sucesivamente seguimos este procedimiento hasta que el grafo quede numerado garbosamente. Veamos más detalladamente con un ejemplo:



Como nuestro grafo tiene 14 lados y 15 vértices debemos asignar a los vértices los números desde el cero hasta el 14, el menor de ellos es el cero luego se lo asignare al primer vértice del gusano. Como de él no se desprende más que una sola rama que es la que pertenece al mismo gusano

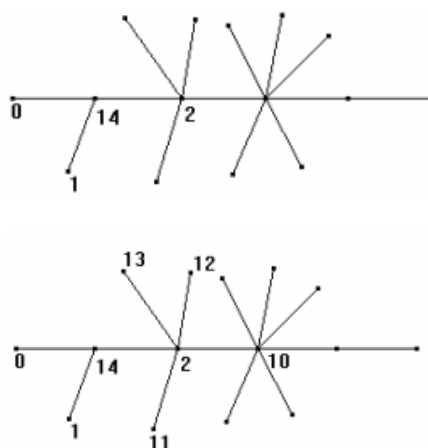


entonces al otro extremo de esa rama le asigno el mayor número en este caso el 14.

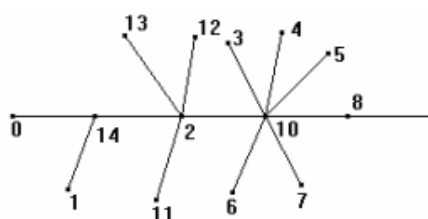


Como desde el vértice numerado con 14 se desprenden dos ramas más entonces tomo los dos menores de los números restantes y se los asigno a los vértices de cada uno de los lados buscando que el mayor de ellos quede asignado al vértice que hace parte del gusano base.

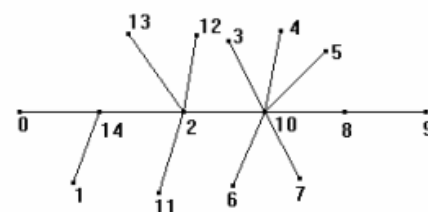
Desde el vértice numerado con 2 se desprenden tres ramas más entonces tomo los tres mayores de los números restantes y se los asigno a los vértices de cada uno de los tres lados buscando que el menor de ellos quede asignado al vértice que hace parte del gusano base.



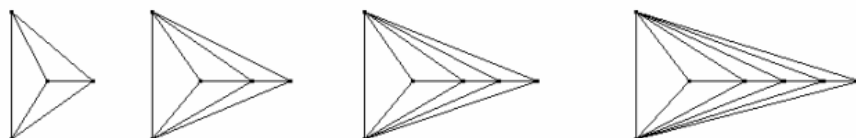
Ahora como del vértice asignado con 10 se desprenden otras 6 ramas entonces tomamos los seis menores de los números restantes y se los asigno a los vértices de esas ramas buscando que el mayor de ellos quede en el vértice que hace parte del gusano.



Como del vértice al que le asignamos el ocho se desprende solo una rama entonces tomamos el mayor de los números que nos quedan que en este caso también resulta ser el último y se lo asignamos al otro vértice de la rama.

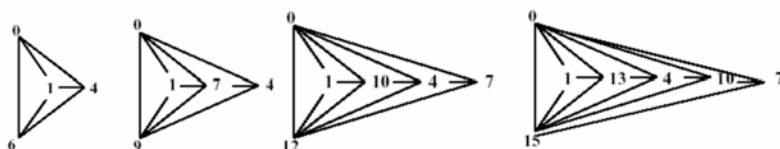


Triangulares: Llamaremos triangulares a los grafos en los que existen dos vértices que se encuentran conectados entre ellos y a todos los demás vértices del grafo, además de cada uno de los otros vértices deben desprenderse exactamente tres lados miremos algunos ejemplos:



A diferencia de los tipos de grafos que hemos visto anteriormente, en estos grafos la cantidad de

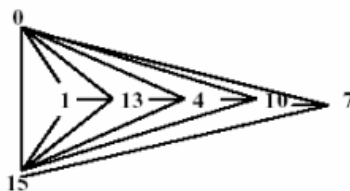
vértices del grafo es menor a la cantidad de lados del grafo, miremos como podemos numerar garbosamente estos grafos:



Para numerar garbosamente un grafo triangular solo debemos observar que si eliminamos los dos vértices que están conectados con los demás obtendríamos un gusano, lo que debemos hacer es completar ese gusano de la forma en que ya sabemos, pero utilizando todos los números de la forma $3k + 1$ que haya entre 0 y el número total de lados, por ejemplo en el ultimo caso tenemos que nuestro grafo tiene 15 lados, los números de la forma $3k + 1$ des de 0 hasta 15 son: 1, 4, 7, 10 y 13 con este número debemos llenar el gusano:

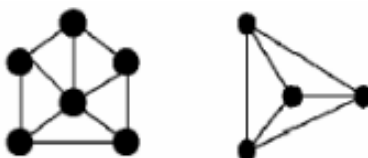
$$1 - 13 - 4 - 10 - 7$$

Después simplemente dibujamos nuevamente nuestros vértices y a uno de ellos le asignamos el cero y al otro le asignamos el número total de lados en nuestro ejemplo el 15, y obtendremos nuestro grafo garboso.

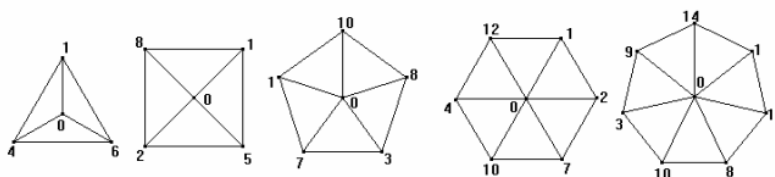


Si miramos la numeración dual a la dada, los números que aparecerán en l gusano serán los de la forma $3k + 2$.

Cometas: Llamaremos cometas a los grafos, formados por un polígono con un vértice interior del cual se desprende un lado hacia cada uno de los demás vértices, veamos algunos ejemplos:

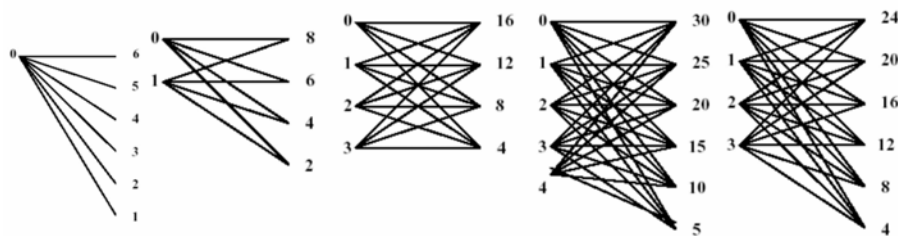


Veamos las numeraciones garbosas de algunas cometas:



Aunque consideramos que todas las cometas son grafos garbosos, aun no hemos encontrado una estrategia clara que me permita numerar garbosamente cualquier cometa.

Grafos Bipartidos: Los grafos bipartidos reciben ese nombre porque se puede hablar de dos conjuntos de vértices, cada vértice de un conjunto esta conectado con todos los vértices del otro conjunto, pero no esta conectado con los vértices del mismo conjunto. Este tipo de grafos siempre se pueden numerar garbosamente miremos algunos ejemplos:



Para numerar garbosamente estos grafos, basta con identificar en cual de los dos conjuntos hay menor cantidad de vértices (en caso de que tengan el mismo se toma cualquiera de los dos), supongamos que es de m vértices, a ese conjunto de vértices se les asignan los números desde 0 hasta $m - 1$, y al otro conjunto de vértices se les asignan van asignando los múltiplos de m , es decir m , $2m$, $3m$ y así sucesivamente hasta que se termine de numerar el grafo.

Aunque en este trabajo tan solo mostramos algunas de las estrategias para numerar ciertos tipos de grafos, es más interesante establecer con ellas ciertas regularidades numéricas, que no son incluidas en este trabajo, ya que se pretende presentarlas en trabajo posterior.

Bibliografía

- [1] GADNER, M. *Ruedas, Vida y otras Diversiones Matemáticas. Los Grafos Garbosos*. Editorial Labor, 1988.
- [2] SANCHEZ, Y. *Modulo de Particiones Numéricas*. Universidad Pedagógica Nacional. 2006